

# 改进灰色预测模型及其在变形监测中的应用

赵彦刚<sup>1</sup> 任志明<sup>2</sup> 李兆洋<sup>2</sup>

(1. 国家测绘地理信息局第二地形测量队, 陕西 西安 710054; 2. 四川志德岩土工程有限责任公司, 四川 成都 610000)

**[摘要]** 分析与预报是基坑监测的重要内容, 对于确保基坑和周围设施的安全具有重要意义。灰色系统理论自创立以来被广泛应用于变形监测的预报上, 但灰色预测模型仍有一定的局限性。为此本文尝试对其进行改进, 采用两种函数变换对灰色预测模型的原始数据进行预处理, 并分析改进模型的预报效果。实验表明, 经过指数函数变换和线性函数变换的灰色模型均能获得更好的预测结果, 且经过线性函数变换的灰色模型的估计结果要优于经过指数函数变换的灰色模型。

**[关键词]** 变形监测; 灰色模型; 线性变换; 指数变换

**[中图分类号]** P258 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1674-5019 (2018) 02-0089-04

## The Modified Grey Prediction Model and Its Application in Deformation Monitoring

ZHAO Yan-gang REN Zhi-ming LI Zhao-yang

### 1 前言

近年来由于大型建筑物逐渐增多, 建筑物的基坑向着大深度、大面积方向发展。在城市施工中, 基坑周边环境也更加复杂, 存在地铁、高楼、高架桥等的情况逐渐增多。为保证深基坑及周边建(构)筑物的安全, 同时为基坑支护方案的制定提供基础资料, 必须对基坑进行监测<sup>[2]</sup>。基坑监测包括桩顶水平位移、桩顶竖向位移、桩身测斜、周边路面沉降、周边建筑物沉降等多个项目。当一个项目的监测值达到预警值时, 应发出对应等级的警报并采取防护措施。此外在监测过程中若对未来变化趋势有一定的估计, 就可以在监测值达到预警值之前, 较早地采取防护措施, 这将会极大地提高监测效率。因此, 各监测项的分析与预报是变形监测的重要内容, 其中, 预报方法主要有时间序列分析法、回归分析法、小波分析法、卡尔曼滤波法、灰色模型分析法等<sup>[6-7]</sup>。

自邓聚龙教授创立灰色系统理论以来, 该模型以建模灵活、所需数据量少等特点而被广泛应用于各个领域<sup>[1][3-4]</sup>, 但灰色系统也存在一定的局限性: 标准灰色模型对于周期性数据预测结果较差、对噪声抵抗能力不强等<sup>[6]</sup>。而强降雨、地震、大风、极端温度等突发状况会引起监测数据突变, 使原始数据无法满足指数型增长的要求。与此同时由仪器、监测人员造成的

偶然误差和粗差广泛存在于监测过程中, 因此监测数据中常包含有噪声。这些情况都会对灰色模型的预测结果产生影响。鉴于此, 本文分别采用指数函数和线性函数灰色模型算法进行改进, 即先对原始监测数据进行预处理提高其光滑比, 然后进行外推预测并分析其预测结果。

### 2 GM(1, 1) 模型<sup>[5]</sup>

灰色模型利用一些表示系统行为特征的信息作为原始数据, 经过一系列处理后对新生成的数据序列建立微分方程并求解。该模型减弱了原始数据的随机性, 将系统的一些本质特征反映出来。

根据微分方程的阶数和所估计变量的个数, 灰色模型可进一步细分, 其中最典型的模型是 GM(1, 1) (Gray Model, 1 阶方程, 1 个变量), 其建模过程及模型特征如下。

设  $X^{(0)}$  为一组非负时间序列:

$$X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)) \quad (1)$$

通过 1-AGO (accumulated generating operation) 运算, 可使原本无规律的监测数据序列转化为线性增长数列并能够挖掘其内部关联性。  $X^{(0)}$  的 1-AGO 序列如公式 (2) 所示:

$$X^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)) \quad (2)$$

其中  $X^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i), k=1,2,\dots,n$

定义 GM (1, 1) 模型的灰微分方程为:

$$x^{(0)}(k) + a \cdot z^{(1)}(k) = b \quad (3)$$

其中  $x^{(0)}(k)$  称为灰导数,  $a$  称为发展系数,  $b$  称

为灰作用量。设  $B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}$ ,  $Y = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix}$ ,

$z^{(1)}(k) = \alpha \cdot x^{(1)}(k) + (1-\alpha) \cdot x^{(1)}(k-1), k=2,\dots,n$  为  $X^{(1)}$  的邻值生成序列, 则模型灰微分方程的参数估计为

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = [B^T B]^{-1} B^T Y.$$

(3) 式对应的白化方程为:

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + a \cdot x^{(1)} = b \quad (4)$$

方程 (4) 的解为:

$$x^{(1)}(t) = \left( x^{(1)}(1) - \frac{b}{a} \right) e^{-at} + \frac{b}{a} \quad (5)$$

经过 IAGO 过程可得预测值:

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = (1-e^a) \left( x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right) e^{-ak} + \frac{b}{a} \quad (k=1,2,3,\dots,n) \quad (6)$$

### 3 灰色预测模型的改进

定义  $\rho(k)$  为一组时间序列  $X^{(0)}$  的光滑比:

$$\rho(k) = \frac{x^{(0)}(k)}{\sum_{i=1}^{k-1} x^{(0)}(i)} \quad (k=2,3,\dots,n) \quad (7)$$

光滑比反映了时间序列的光滑性, 一组序列的光滑比越低, 说明该序列中的数据变化越平稳<sup>[4]</sup>。可以证明, GM (1, 1) 的精度除与模型算法本身有关外, 也与原始数据序列的光滑度有一定关系, 原始数据序列的光滑度越高, 建立的模型精度就越高。

已有研究表明, 使用对数函数变换、幂函数变换、指数函数变换、线性函数变换等方法对原始时间序列进行预处理, 可以提高序列的光滑比。而文献[4]已经证明, 指数函数变换在提高一组序列的光滑比方面比对数函数变换、幂函数变换更为有效。本文选取指数函数变换和线性函数变换两种方法对 GM (1, 1) 模型的原始时间序列进行预处理, 研究这两种变换对

于提高模型精度的效果。

在精度评定方面, 考虑到 GM (1, 1) 的不确定性, 通常选择均方误差 (MSE)、平均绝对误差 (AME) 或平均绝对百分比误差 (MAPE) 对预测结果进行精度评定<sup>[5-6]</sup>。本文采用 MSE 进行评估:

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X^{(0)}(k) - \hat{X}^{(0)}(k))^2 \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (8)$$

#### 3.1 指数函数变换

文献[1]显示, 通过负指数变换的时间序列比原序列具有更好的光滑比。经指数函数变换的 GM (1, 1) 计算过程如下:

(1) 将时间序列  $X^{(0)}$  进行指数变换  $X_1^{(0)} = m^{-X^{(0)}} (m > 1)$  得到  $X_1^{(0)}$ 。文献[1]中采用  $e$  作为  $m$  的值并取得了良好的结果, 本文在实验过程中延续这种方法。

(2) 使用 GM (1, 1) 算法对  $X_1^{(0)}$  进行解算, 得到  $X_1^{(0)}$  的预测值  $\hat{X}_1^{(0)}$ 。经过  $\hat{X}^{(0)} = -\log_m^{-\hat{X}_1^{(0)}}$  变换, 得到原始序列  $X^{(0)}$  的预测值。

#### 3.2 线性函数变换

文献[4]显示, 通过线性函数变换的函数  $X_2^{(0)}$  光滑比更高。经线性函数变换的 GM (1, 1) 计算过程如下:

(1) 对序列  $X^{(0)}$  作线性变换  $X_2^{(0)} = pX^{(0)} + q (p < 0, pX^{(0)} + q > 0)$  得到  $X_2^{(0)}$ 。本文在实验过程中使用遗传算法不断调整  $p$ 、 $q$  的值<sup>[4]</sup>, 并选取其中最合适的一组。

(2) 使用 GM (1, 1) 算法对  $X_2^{(0)}$  进行解算, 得到  $X_2^{(0)}$  的预测值  $\hat{X}_2^{(0)}$ 。经过  $\hat{X}^{(0)} = \frac{[\hat{X}_2^{(0)} - q]}{p}$  变换, 得到原始序列  $X^{(0)}$  的预测值。

### 4 实验分析

桩顶水平位移是基坑变形监测的重要项目, 其变化情况可充分反映出基坑围护结构的变化情况, 随机选取成都市某基坑的 3 个灌注桩桩顶水平位移监测点 2017 年 8 月的 8 期监测数据 (称为估计区间) 建立 GM (1, 1) 模型及其改进模型, 然后对未来 2 期 (称为外推区间) 监测情况进行预测, 并将预测结果与实测数据对比。实验结果如图 1、图 2、图 3 及表 1、表 2、表 3 所示, 数据精度评定结果见表 4。

从表 1、表 2 和表 3 中可以看出, 三个监测点的两期外推数据中, 原始数据经线性函数变换的灰色模型的预测值偏差分别为 0.17mm、1.11mm 以及 -0.43mm, 经指数函数变换的灰色模型的预测值偏差分别为 0.32mm、1.53mm 以及 1.01mm。由表 4 可知, 原始数据经线性函数变换的灰色模型的预测值的 MSE 分别为 0.0601mm、0.5133mm 及 0.1558mm, 均优于指数函数变换。

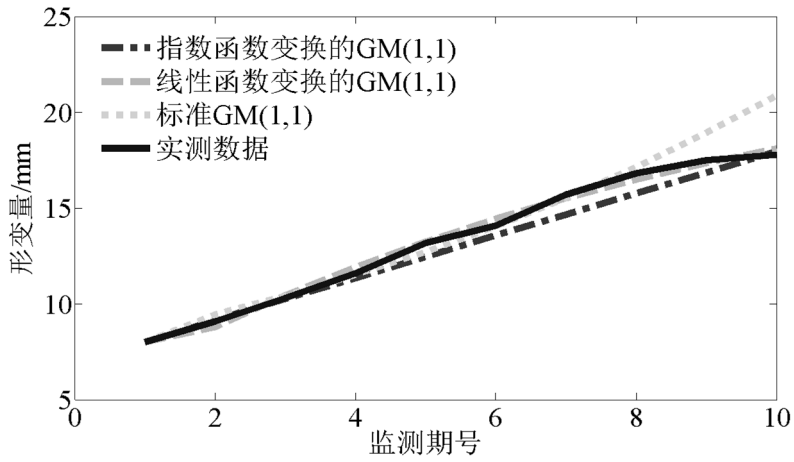


图 1 一号监测点实验结果

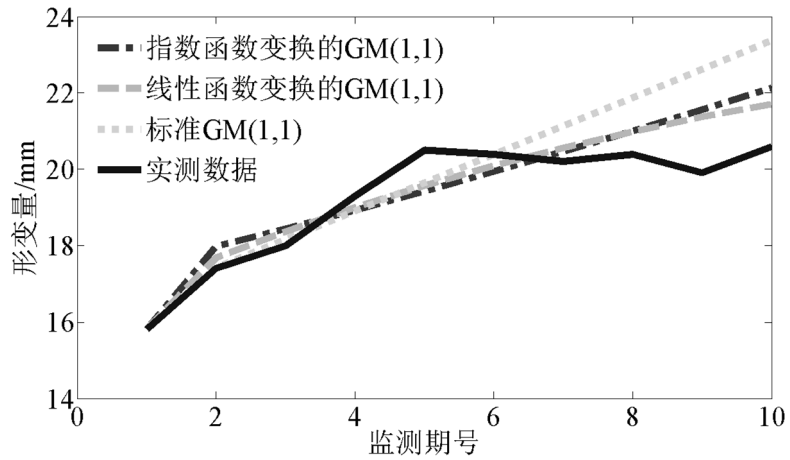


图 2 二号监测点实验结果

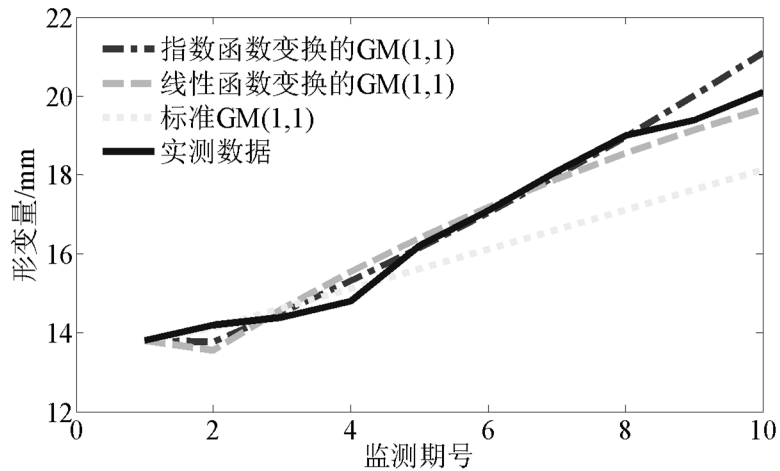


图 3 三号监测点实验结果表

表 1 一号监测点估计值偏差 (mm)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
GM (1, 1)	0	0.34	0.12	-0.09	-0.48	-0.06	-0.19	0.33	1.42	3.10
指数函数变换	0	0.06	-0.04	-0.24	-0.74	-0.54	-1.03	-1.03	-0.63	0.32
线性函数变换	0	-0.32	0.13	0.31	0.05	0.34	-0.19	-0.32	-0.15	0.17

表 2 二号监测点估计值偏差 (mm)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
GM (1, 1)	0	0.01	0.16	-0.40	-0.85	-0.01	0.94	1.48	2.73	2.77
指数函数变换	0	0.57	0.45	-0.37	-1.07	-0.46	0.27	0.61	1.66	1.53
线性函数变换	0	0.28	0.38	-0.29	-0.92	-0.30	0.36	0.59	1.47	1.11

表 3 三号监测点估计值偏差 (mm)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
GM (1, 1)	0	-0.08	0.22	0.32	-0.58	-0.98	-1.48	-1.88	-1.78	-1.98
指数函数变换	0	-0.44	0.12	0.52	-0.04	-0.05	-0.12	-0.03	0.61	1.01
线性函数变换	0	-0.64	0.20	0.75	0.21	0.09	-0.20	-0.45	-0.26	-0.43

表 4 三种模型的 MSE 值

	GM (1, 1)	指数函数变换	线性函数变换
一号监测点	1.2132	0.3451	0.0601
二号监测点	1.9093	0.7560	0.5133
三号监测点	1.4217	0.1576	0.1558

## 5 结论

本文使用经过指数函数变换的灰色模型和经过线性函数变换的灰色模型对基坑灌注桩桩顶水平位移形变量进行了预测,并将其结果与标准灰色模型的预测结果以及实测数据进行对比,得出了以下结论:

(1) 标准 GM (1, 1) 模型、指数函数变换的 GM (1, 1) 模型、线性函数变换的 GM (1, 1) 模型,都可以对基坑变形监测数据的发展趋势做出合理估计,但经过线性函数变换的灰色模型具有更好的外推结果。

(2) 原始数据的噪声仍会对线性函数变换的灰色预测模型产生影响,应对此现象做进一步研究。

### 参考文献

- [1] 邹泽林,左廷英,宋迎春.改进无偏灰色模型在沉降观测中的应用[J].测绘科学技术,2016,4(1):11-18.
- [2] 徐杨青,程琳.基坑监测数据分析处理及预测预警系统研究[J].岩土工程学报,2014,11(36):219-224.
- [3] 崔立志,刘思峰.基于数据变化技术的灰色预测模型[J].系统工程,2010,28(5):110-114.
- [4] 张军.灰色预测模型的改进及其应用[D].西安:西安理工大学,2008.
- [5] 王忠桃.灰色预测模型相关技术研究[D].成都:西南交通大学,2008.
- [6] 吴开岩.多点灰色变形分析与预报方法研究[D].成都:

西南交通大学,2017.

- [7] 穆勇.无偏灰色模型 GM (1, 1) 的直接建模法[J].系统工程与电子技术,2003,25(9):1094-1107.
- [8] 邓跃进,张正禄,章传银.自适应卡尔曼滤波在变形监测动态数据处理中的应用[J].武测科技,1996,(1):1-4.
- [9] 谢乃明,刘思峰.离散灰色模型的拓展及其最优化求解[J].系统工程理论与实践,2006,(6):108-112.
- [10] 邓聚龙.灰色系统理论教程[M].武汉:华中理工大学出版社,1990.

[收稿日期] 2018-01-31

[作者简介] 赵彦刚(1986-),男,工程师,主要从事航空摄影测量、工程测量等方面研究。